Normalität bei Paaren subnormaler Untergruppen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Peter Schmid
aus Schwäbisch Gmünd

1970

Normalität bei Paaren subnormaler Untergruppen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Peter Schmid
aus Schwäbisch Gmünd

1970

UNIV.
LEIDEN

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1970

Dekan: Prof. Dr. Helmut Wielandt

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Wielandt

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Salzmann

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

1. Einleitung 1

1.1. Bezeichnungen 1

1.2. Die Normenkette einer subnormalen Untergruppe 2

1.3. Grundlegende Hilfssätze 4

1.4. Aufgabenstellung und Ergebnisse 5

2. Orthogonalitätsrelationen 8

3. Nilgruppen und nachauflösbare Gruppen 14

4. Über die Struktur des Erzeugnisses zweier Subnormalteiler 19

5. Notwendige Bedingungen 24

6. Hinreichende Bedingungen 28

7. Literatur 34

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547609_0118

NORMALITÄT BEI PAAREN SUBNORMALER UNTERGRUPPEN

1. EINLEITUNG

1.1. BEZEICHNUNGEN. Es sei H eine Untergruppe der Gruppe G ($H \leqslant G$). H heißt eine subnormale Untergruppe von G, kurz $H \lhd\lhd G$, falls endlich viele Untergruppen H_i ($i = 0,\ldots,n$) von G existieren, so daß

$$H = H_n \lhd H_{n-1} \lhd \ldots \lhd H_o = G. \qquad (1)$$

Dabei bedeutet $H_{i+1} \lhd H_i$, daß H_{i+1} Normalteiler von H_i ist. Eine Reihe (1) heißt eine Subnormalreihe von G nach H. Wir nennen eine Subnormalreihe von G nach 1 (neutrales Element von G) kurz eine Subnormalreihe von G. Ein subnormaler Faktor von G ist eine Faktorgruppe H/K, wo $K \lhd H \lhd\lhd G$ ist.

Die nicht-negative ganze Zahl n, die in der Subnormalreihe (1) auftritt, heißt deren Länge. Die Länge einer kürzesten Subnormalreihe heißt der Defekt s(G:H) von H in G.

Folgende Symbole werden des öfteren benützt werden:

$Z(G)$ = Zentrum der Gruppe G. Bei der Festsetzung $Z_o(G) = 1$ ist $Z_n(G)$ das n-te Glied der aufsteigenden Zentralreihe von G, d.h. es ist $Z_n(G)/Z_{n-1}(G) = Z(G/Z_{n-1}(G))$.

$A(G)$ = Automorphismengruppe von G.

$\mathfrak{B}(G)$ = gp $\{A \leqslant G: A \lhd\lhd G, A$ zyklisch$\}$. $\mathfrak{B}(G)$ ist das Baer-Radikal von G.

$\mathrm{Hom}(H,K)$ = Menge der Homomorphismen von der Gruppe H in die Gruppe K.

$H \times K$ = direktes Produkt von H und K.

$H \times_\sigma K$ = semidirektes Produkt von K mit H unter $\sigma \in \mathrm{Hom}(H,A(K))$.

$H \otimes_\sigma K$ = Tensorprodukt von H und K (wird in §2 erläutert).

C_m = zyklische Gruppe der Ordnung $m = 1,2,\ldots,\infty$.

C_{p^∞} = quasizyklische Gruppe zur Primzahl p ("Prüfer-Gruppe").

$\overline{\mathfrak{m}}$ bzw. $\underline{\mathfrak{m}}$ sind die Klassen der Gruppen, die die Maximal- bzw. Minimalbedingung für subnormale Untergruppen erfüllen.

$H \perp K$ erläutert in §1.3.

$H \perp_\mathfrak{F} K$ siehe Definition 2.3.

$[x,y] = x^{-1}y^{-1}x\,y = x^{-1}x^y$ ist der Kommutator der Gruppenelemente x und y.

$H^K = gp\{h^k: h^k = k^{-1}h\,k,\ k \in K\}$ für $H \leqslant G$, $K \subseteq G$.
$\gamma HK = [H,K] = gp\{[h,k]: h \in H,\ k \in K\}$ ist die Kommutatorgruppe der Untergruppen H und K.
Höhere Kommutatorgruppen werden rekursiv definiert:

$$\gamma H^1 = H, \quad \gamma H^m = \gamma(\gamma H^{m-1})H \quad \text{für } m > 1,$$

$$\gamma H^m K^0 = \gamma H^m, \quad \gamma H^m K^n = \gamma(\gamma H^m K^{n-1})K \quad \text{für } n > 0.$$

Diese Schreibweise stammt von P. HALL [7] und ROSEBLADE [3]. Ergänzend sei bemerkt, daß wir für die Kommutatorgruppe γH^2 der Gruppe H kurz H' schreiben werden.

1.2. DIE NORMENKETTE EINER SUBNORMALEN UNTERGRUPPE.

Wir stellen kurz den Kommutatorenkalkül dar, der von P. HALL [7] entwickelt wurde, und der ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung subnormaler Untergruppen ist. Es seien x,y,z Elemente, H und K Untergruppen einer Gruppe G. Es gelten die beiden folgenden Identitäten:

$$[xy,z] = [x,z]^y\,[y,z], \tag{2}$$

$$[x,yz] = [x,z]\,[x,y]^z. \tag{3}$$

H^K ist der kleinste Normalteiler des Erzeugnisses $J = \langle H,K\rangle (= gp\{H,K\})$, der H enthält. H^K heißt daher die normale Hülle von H in J. Es ist insbesondere $H^K = H^J$. Ferner ist

$$\gamma HK = \gamma KH \lhd \langle H,K\rangle, \tag{4}$$

und zwar ist γHK der kleinste Normalteiler von $\langle H,K\rangle$, modulo welchem H und K elementweise vertauschbar sind.

Zwischen der normalen Hülle und der Kommutatorgruppe besteht eine enge Beziehung, die direkt aus der Definition des Kommutators folgt:

$$H^K = H\,\gamma HK. \tag{5}$$

Es ist genau dann $H \lhd \langle H,K\rangle$, wenn $H^K = H$ ist. Nach (5) können wir das auch so ausdrücken: Genau dann ist $H \lhd \langle H,K\rangle$, wenn $\gamma HK \leqslant H$ ist. Sind beispielsweise H und K disjunkte Normalteiler, so ergibt sich $\gamma HK = 1$, d.h. H und K sind elementweise vertauschbar. Dies ist wohlbekannt.

Ist $H_1 \leqslant H$, $K_1 \leqslant K$, dann ist $H^{K_1} \leqslant H^K$, $H_1^K \leqslant H^K$ sowie

$\gamma^{H_1}K \leqslant \gamma HK$. Ist schließlich α ein Homomorphismus von G in eine Gruppe G_o, dann ist

$$(\gamma HK)^\alpha = \gamma H^\alpha K^\alpha . \qquad (6)$$

Wir wenden diesen Kalkül nun auf Subnormalteiler an. Ist H eine subnormale Untergruppe von G, so existiert eine Subnormalreihe (1). Wir definieren rekursiv: $G_o = G$, $G_m = H^{G_{m-1}}$ für $m > 0$. Dann ist G_1 der kleinste Normalteiler von G, der H enthält. Folglich ist $G_1 \leqslant H_1$. Entsprechend ist $G_2 \leqslant H^{H_1} \leqslant H_2$. Ein einfacher Induktionsschluß zeigt, daß man durch diese fortgesetzte Bildung der normalen Hüllen eine Subnormalreihe von G nach H erhält, die schneller fällt als jede andere. Man nennt diese nach BAER die "Normenkette von H in G". Die kleinste nicht-negative ganze Zahl r, für die $G_r = H$ ist, ist der Defekt von H in G.

LEMMA 1.1. Seien H und K Untergruppen einer Gruppe G, J ihr Erzeugnis. Genau dann ist H subnormal in J, wenn es eine nicht-negative ganze Zahl n gibt, so daß $\gamma KH^n \leqslant H$ ist. Ist H subnormal in J, so gilt $s(J:H) = \min\{n: \gamma KH^n \leqslant H\}$.

Beweis. Im trivialen Fall H = J ist $s(J:H) = 0$ und $\gamma KH^o = K \leqslant H$. Sei daher H nun eine echte Untergruppe von J. Wir definieren rekursiv: $H_o = J$, $H_m = H^{H_{m-1}}$ für $m > 0$. Durch Induktion nach m wird gezeigt, daß $H_m = H\,\gamma KH^m$ für jede natürliche Zahl m ist. Daraus folgt dann das Lemma unmittelbar. Wegen $H^J = H^K$ ist nach (5) $H_1 = H\,\gamma KH$. Sei schon erwiesen, daß $H_{m-1} = H\,\gamma KH^{m-1}$ ist ($m > 1$). Dann ist:

$$H_m = H^{H\,\gamma KH^{m-1}} = H^{\gamma KH^{m-1}},$$

und aus (5) ergibt sich die behauptete Beziehung. q.e.d.

Bemerkung. Eine Gruppe N ist genau dann nilpotent von einer Klasse $\leqslant c$, wenn $\gamma N^{c+1} = 1$ ist. Ist N nilpotent von einer Klasse c, A eine Untergruppe von N, dann ist $\gamma NA^c \leqslant \gamma N^{c+1} = 1$, und folglich ist A nach Lemma 1.1. subnormal in N. Ferner ist N genau dann ein nilpotenter Subnormalteiler einer Gruppe G, wenn es eine natürliche Zahl r gibt, so daß $\gamma GN^r = 1$ ist.

1.3. GRUNDLEGENDE HILFSSÄTZE. Während das Erzeugnis zweier Normalteiler einer Gruppe G wieder Normalteiler ist, ist das Erzeugnis zweier subnormaler Untergruppen im allgemeinen kein Subnormalteiler (ZASSENHAUS [11, p. 235]). Ist jedoch $G \in \overline{\mathfrak{m}}$ oder $G \in \mathfrak{M}$, dann ist das Erzeugnis zweier Subnormalteiler wieder subnormal. Für den ersten Fall hat dies WIELANDT [1] nachgewiesen. ROSEBLADE [3] ist das andere Resultat zu verdanken. Das Erzeugnis zweier subnormaler Untergruppen ist ferner subnormal, falls die beiden Untergruppen als Ganze vertauschbar sind. Dies gilt ohne weitere Einschränkungen. Einen Beweis findet man in [5, Lemma 2.4.]. Es ist daher wichtig zu wissen, unter welchen Voraussetzungen zwei subnormale Untergruppen vertauschbar sind.

Nach ROSEBLADE [4] heißen zwei Gruppen H und K orthogonal ($H \perp K$), falls das Tensorprodukt $H/H' \otimes K/K'$ trivial ist. ROSEBLADE hat gezeigt, daß zwei orthogonale subnormale Untergruppen vertauschbar sind. Dies ergibt sich aus dem für uns wichtigen Satz [4, Theorem 2], den wir aus seiner Arbeit zitieren:

LEMMA 1.2. Sind H und K orthogonale Untergruppen einer Gruppe, dann ist $\gamma HK = \gamma KH^m \gamma HK^n$ für beliebige natürliche Zahlen m und n.

Sind nämlich in Lemma 1.2. H und K subnormale Untergruppen, so gibt es nach Lemma 1.1. natürliche Zahlen r und s, so daß $\gamma KH^r \leqslant H$, $\gamma HK^s \leqslant K$ ist. Wählt man daher $m = r$ und $n = s$, so ergibt sich $\gamma HK \leqslant HK$. Da das Erzeugnis $J = \langle H,K \rangle = H^K K = H(\gamma HK)K$ ist, folgt $J = HK$.

Neben Lemma 1.2. nimmt in unserer Untersuchung der folgende Hilfssatz von P. HALL [7, Theorem 2] eine Schlüsselstellung ein:

LEMMA 1.3. Sind H und K Untergruppen einer Gruppe G, und existiert eine natürliche Zahl m, so daß $\gamma HK^m = 1$ ist, dann ist $\gamma K^{n+1} H = 1$ für $n = m(m-1)/2$.

1.4. AUFGABENSTELLUNG UND ERGEBNISSE. Gegeben seien zwei abstrakte Gruppen H und K. Diese heißen in die Gruppe G subnormal eingebettet, falls es Untergruppen H_o und K_o von G gibt, so daß $H \cong H_o \lhd\lhd G$, $K \cong K_o \lhd\lhd G$ ist. Die Einbettung heißt K-zentral (eigentlich K-hyperzentral), falls es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $H_o \cap K_o \leqslant Z_n(K_o)$ ist. Beispielsweise ist jede Einbettung von H und K in eine Gruppe K-zentral, falls K nilpotent ist. Eine disjunkte Einbettung ist H- und K-zentral. Wir werden die einzubettenden Gruppen mit ihren Kopien identifizieren.

Unsere Aufgabe war es, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Strukturen zweier Gruppen H und K anzugeben, damit diese sich bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung zentralisieren. Die Lösung dieser Aufgabe fanden ROSEBLADE (unveröffentlicht)* und der Verfasser unabhängig voneinander. Da zwei disjunkte Normalteiler einer Gruppe sich zentralisieren, konnten wir uns im wesentlichen darauf beschränken zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen Normalität eintritt. Wir haben die ursprüngliche Fragestellung allgemeiner gefaßt und auch diskutiert, inwieweit man auf die Disjunktheit der beiden Subnormalteiler verzichten kann.

Folgende drei Bedingungen für die Strukturen zweier Gruppen H und K spielen bei unseren Betrachtungen eine Rolle:

(i) H ist orthogonal zu K.

(ii) Es gibt eine natürliche Zahl r, so daß jeder abelsche Subnormalteiler von $K/Z_r(K)$, der epimorphes Bild von H ist, trivial ist.

(iii) Es gibt eine natürliche Zahl s, so daß jeder abelsche Subnormalteiler von $H/Z_s(H)$, der epimorphes Bild von K ist, trivial ist.

Wir merken an, daß nach Lemma 2.7. jeder abelsche Subnormalteiler von K/Z(K) trivial ist, der epimorphes Bild von H ist, falls die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.

Die notwendigen Bedingungen für Normalität werden gewonnen durch die Konstruktionen in Theorem 5.1. und Theorem 5.3..

---

*Nach Fertigstellung dieser Arbeit erschien Roseblades Veröffentlichung (Bull. London Math. Soc. 1969).

Sie erweisen sich in Theorem 6.2. auch als hinreichend. So ergibt sich der

HAUPTSATZ. (a) Genau dann wird H von K bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung normalisiert, wenn die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.

(b) Genau dann zentralisieren sich H und K bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung, wenn die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt sind.

Die angegebenen Bedingungen sind sogar schon unter schwächeren Voraussetzungen über den Durchschnitt hinreichend. Nach Theorem 6.2. wird H von K bei jeder K-zentralen subnormalen Einbettung normalisiert, wenn die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind. Erfüllen H und K alle drei Bedingungen, dann zentralisieren sie sich bei jeder subnormalen Einbettung, die H- und K-zentral ist. Ist beispielsweise K eine nilpotente Gruppe, so ist jede Einbettung von H und K K-zentral, und die Bedingung (ii) ist trivialerweise erfüllt. Infolgedessen wird H von der nilpotenten Gruppe K bei jeder subnormalen Einbettung normalisiert, wenn nur H und K orthogonal sind (Korollar 6.3.). Eine weitere Konsequenz ist, daß zwei orthogonale nilpotente Subnormalteiler immer elementweise vertauschbar sind.

Nach Lemma 1.2. sind zwei orthogonale Subnormalteiler vertauschbar. Unter der im allgemeinen schwächeren Voraussetzung, daß die Subnormalteiler vertauschbar sind, gilt

THEOREM 6.4. Die Gruppen H und K seien K-zentral und subnormal in eine Gruppe eingebettet, so daß HK = KH gilt. Dann ist jede der beiden folgenden Bedingungen hinreichend für $H \lhd \langle H,K \rangle$:

(1) Jeder abelsche subnormale Faktor $X/H \cap K$ von K, der epimorphes Bild von H ist, ist trivial.

(2) Es ist $\beta(K) \in \mathfrak{M}$ (d.h. $\beta(K)$ ist endlich erzeugt), und H ist orthogonal zu $\beta(K)$.

Ein Spezialfall von Theorem 6.4.(1) sei besonders erwähnt: Sind H und K disjunkte vertauschbare Subnormalteiler, dann

wird H von K normalisiert, falls jeder abelsche Subnormalteiler von K trivial ist, der epimorphes Bild von H ist. (Diese Strukturbedingung impliziert (ii) nach Lemma 2.6.!)

Richtungsweisend für unsere Überlegungen waren einige Sätze von WIELANDT. So hat er gezeigt, daß eine einfache nichtabelsche subnormale Untergruppe von jeder andern subnormalen Untergruppe zentralisiert wird, in der sie nicht enthalten ist [2]. Dieses Ergebnis folgt aus Theorem 6.2.(b). Ferner gilt nach [1, Satz 24]: Sind H und K Subnormalteiler einer Gruppe $G \in \overline{\mathfrak{m}} \cap \underline{\mathfrak{m}}$, H perfekt ($H = H'$) und $H \cap K$ auflösbar, dann ist $H \lhd \langle H,K \rangle$. Diesen Satz werden wir verallgemeinern:

THEOREM 6.6. Seien H und K vertauschbare subnormale Untergruppen mit auflösbarem Durchschnitt. Jeder auflösbare subnormale Faktor $X/H \cap K$ von K, der epimorphes Bild von H ist, sei trivial. Ist überdies $(H \cap K)^K$ auflösbar oder $H \in \overline{\mathfrak{m}}$, dann ist $H \lhd \langle H,K \rangle$.

Schließlich werden wir einen weiteren Satz von WIELANDT verallgemeinern [1, Satz 17, dort unter der Zusatzvoraussetzung $G \in \overline{\mathfrak{m}} \cap \underline{\mathfrak{m}}$ bewiesen]:

KOROLLAR 4.6. Genau dann zentralisieren sich zwei disjunkte subnormale Untergruppen H und K einer Gruppe G, wenn $H^K \cap K^H \cap \mathfrak{B}(G) = 1$ ist.

Dieses Korollar folgt direkt aus

THEOREM 4.4. Für subnormale Untergruppen H und K einer Gruppe G mit nachauflösbarem Durchschnitt gilt:
(a) $H^K \cap K^H$ ist nachauflösbar,
(b) $H^K \cap K^H \cap \mathfrak{B}(G) \neq 1$, außer wenn $H^K \cap K^H = 1$ ist.

Der Begriff der Nachauflösbarkeit wird in Definition 3.5. erläutert. Ist in Theorem 4.4. $H \cap K$ sogar auflösbar und $\langle H,K \rangle \in \overline{\mathfrak{m}} \cup \underline{\mathfrak{m}}$, so ist $H^K \cap K^H$ auch auflösbar.

Wir danken Herrn Professor Dr. Helmut Wielandt für seine wohlwollende Unterstützung und die vielen Anregungen, die er uns nach Lektüre einer ersten Fassung dieser Arbeit gab.

2. ORTHOGONALITÄTSRELATIONEN

Seien H und K beliebige Gruppen. Wir erklären das Tensorprodukt $H \otimes K$ von H und K nach [12, S. 648] als die Gruppe mit den Erzeugenden $h \otimes k$ ($h \in H$, $k \in K$) und den definierenden Relationen:

$$h_1 h_2 \otimes k = (h_1 \otimes k)(h_2 \otimes k),$$

$$h \otimes k_1 k_2 = (h \otimes k_1)(h \otimes k_2).$$

Für abelsche Gruppen stimmt diese Definition überein mit der üblichen Definition des Tensorprodukts von Moduln über dem Ring der ganzen Zahlen. (Wir schreiben auch abelsche Gruppen multiplikativ!) $H \otimes K$ ist eine abelsche Gruppe, und es ist $H \otimes K \cong H/H' \otimes K/K'$. Nach ROSEBLADE heißen H und K orthogonal, falls $H \otimes K = 1$ ist. Wegen $H \otimes K \cong K \otimes H$ ist diese Orthogonalitätsrelation symmetrisch. Eine perfekte Gruppe ist orthogonal zu jeder anderen.

Auf Grund der definierenden Relationen ist ferner genau da $H \perp K$, wenn für jede bihomomorphe Funktion $f(h,k)$ mit Werten in einer Gruppe gilt: $f(h,k) = 1$ für alle $h \in H$, $k \in K$.

Wir fassen weitere Eigenschaften des Tensorprodukts bzw. des ROSEBLADEschen Orthogonalitätsbegriffs in dem folgenden Satz zusammen:

LEMMA 2.1.(a) $C_\infty \otimes G \cong G/G'$ für jede Gruppe G.

(b) $C_m \otimes G \cong G_*/G_*^m$, wobei $G_* = G/G'$ und $G_*^m = \{g^m : g \in G$

(c) $H \otimes (G_1 \times G_2) \cong (H \otimes G_1) \times (H \otimes G_2)$.

(d) $C_m \otimes C_n \cong C_{(m,n)}$, wo (m,n) der größte gemeinsame Teiler von m und n ist.

(e) Ist $G \perp H$, G^α ein homomorphes Bild von G, dann ist $G^\alpha \perp H$.

(f) Ist $H_i \leqslant H$ und $H_i \perp G$ ($i \in I$), so ist $G \perp \langle H_i : i \in$

(g) Ist G/G' eine teilbare Gruppe, H/H' eine Torsionsgruppe, dann ist $G \perp H$.

(Beweise für (a) und (b) sind in [6, p. 250 bzw. 254], für (c) und (d) in [12. S. 649] dargestellt, (e) und (f) haben wir aus [4] entnommen, (g) ist eine leichte Folgerung aus Lemma 64.1. in [6, p. 251].)

Sei G eine Gruppe, A eine abelsche Gruppe. Dann lassen sich die Homomorphismen von G in A in folgendem Sinne verknüpfen: Sind α, $\beta \in \mathrm{Hom}(G,A)$, so verstehe man unter $\alpha.\beta$ bzw. α^{-1} die durch $g \longmapsto g^{\alpha}g^{\beta}$ bzw. die durch $g \longmapsto (g^{\alpha})^{-1}$ $(g \in G)$ definierten Abbildungen von G in A. Da A abelsch ist, sind diese Abbildungen wieder homomorph. Mit dieser Verknüpfung bilden die Homomorphismen eine abelsche Gruppe, die wir ebenfalls mit Hom(G,A) bezeichnen. Das neutrale Element von Hom(G,A) ist der Homomorphismus, der G auf das neutrale Element von A abbildet. Genau dann ist Hom(G,A) = 1, wenn jede Untergruppe von A, die epimorphes Bild von G ist, trivial ist.

Wir stellen einige elementare Eigenschaften von Hom(G,A) zusammen:

LEMMA 2.2.(a) $\mathrm{Hom}(C_{\infty},A) \cong A$ für jede abelsche Gruppe A.

(b) Ist G perfekt, dann ist Hom(G,A) = 1.

(c) Sei G das direkte Produkt der Gruppen G_1, G_2. Sei A das direkte Produkt der abelschen Gruppen A_1, A_2. Dann gilt: $\mathrm{Hom}(G,A) \cong \mathrm{Hom}(G,A_1) \times \mathrm{Hom}(G,A_2)$, $\mathrm{Hom}(G,A) \cong \mathrm{Hom}(G_1,A) \times \mathrm{Hom}(G_2,A)$.

(d) $\mathrm{Hom}(C_m,C_n) \cong C_{(m,n)}$.

(e) Sind A und B endliche abelsche Gruppen, dann ist $\mathrm{Hom}(A,B) \cong A \otimes B$.

Beweis. (a) Sei $C_{\infty} = \langle x \rangle$. Die Abbildung $\varphi \longmapsto x^{\varphi}$ $(\varphi \in \mathrm{Hom}(C_{\infty},A))$ ist ein Isomorphismus von $\mathrm{Hom}(C_{\infty},A)$ auf A: Wegen $x^{\varphi\delta} = x^{\varphi}x^{\delta}$ ist die Abbildung ein Homomorphismus, da $x^{\varphi} = 1$ nur für $\varphi = 1$ ein Isomorphismus. Schließlich ist die Abbildung "auf", denn zu jedem $a \in A$ gibt es ein $\delta \in \mathrm{Hom}(C_{\infty},A)$, so daß $x^{\delta} = a$ ist.

(b) ist trivial.

(c) Zum Beweis der ersten Isomorphie sei p_i der Epimorphismus von A auf A_i $(i = 1,2)$. Jedes $a \in A$ hat eine eindeutige Darstellung $a = a^{p_1}.a^{p_2}$. Ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,A)$ induziert vermöge

$$g^{\varphi} = g^{\varphi \circ p_1} \cdot g^{\varphi \circ p_2} \quad (g \in G)$$

(φ zuerst angewandt) eindeutig bestimmte Homomorphismen $\varphi \circ p_i$ von G in A_i. Umgekehrt wird zu jedem Paar $(\varphi_1,\varphi_2) \in \mathrm{Hom}(G,A_1) \times \mathrm{Hom}(G,A_2)$ durch $g^{\varphi} = g^{\varphi_1}.g^{\varphi_2}$ genau ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,A)$ erklärt,

wobei $\varphi_i = \varphi \circ p_i$ ist. Durch die Zuordnung $\varphi \longmapsto (\varphi \circ p_1, \varphi \circ p_2)$ wird daher Hom(G,A) umkehrbar eindeutig auf $\mathrm{Hom}(G,A_1) \times \mathrm{Hom}(G,A$ abgebildet. Nach der Definition der Homomorphismengruppe ist klar, daß diese Zuordnung ein Homomorphismus ist.

Jedes $\delta \in \mathrm{Hom}(G,A)$ induziert in natürlicher Weise Homomorphismen δ_i von G_i in A (i = 1,2). Die Abbildung $\delta \longmapsto (\delta_1, \delta_2)$ ist ein Homomorphismus von Hom(G,A) in $\mathrm{Hom}(G_1,A) \times \mathrm{Hom}(G_2,A)$. Da nur das neutrale Element von Hom(G,A) auf das neutrale Element von $\mathrm{Hom}(G_1,A) \times \mathrm{Hom}(G_2,A)$ abgebildet wird, ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Schließlich ist die Abbildung surjektiv, denn jedes Paar $\delta_i \in \mathrm{Hom}(G_i,A)$ wird durch ein $\delta \in \mathrm{Hom}(G,A)$ induziert.

(d) Sei $C_m = \langle a \rangle$, $C_n = \langle b \rangle$, t = (m,n). Ein Homomorphismus φ von C_m in C_n ist durch seine Wirkung auf a völlig bestimmt. Sei $a^\varphi = b^r$ $(0 < r \leqslant n)$. Dann ist $b^{rm} = 1$, d.h. n ist ein Teiler von rm. Für r kommen also nur die Vielfachen von s = n/t in Frage. Wegen $r \leqslant n$ gibt es t solche Vielfache. Durch die Zuordnung $a \longmapsto b^{ks}$ $(1 \leqslant k \leqslant t)$ wird tatsächlich ein Homomorphismus φ_k von C_m in C_n erklärt. $\mathrm{Hom}(C_m,C_n)$ ist zyklisch von der Ordnung t, ein erzeugendes Element ist φ_1.

(e) Nach dem Basis-Theorem für abelsche Gruppen sind A und B direkte Produkte zyklischer Gruppen. Infolgedessen ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.1.(c) und (d) sowie aus Lemma 2.2.(c) und (d). q.e.d.

Es ist für uns zweckmäßig, einen weiteren Orthogonalitätsbegriff einzuführen:

DEFINITION 2.3. Die Gruppe H heißt suborthogonal zur Gruppe K $(H \perp\!\!\!\rightarrow K)$, wenn Hom(H,A) = 1 für jede abelsche subnormale Untergruppe A von K ist.

Nach Lemma 2.2.(e) sind die beiden Orthogonalitätsrelationen für endliche abelsche Gruppen gleichwertig. Zwei endliche abelsche Gruppen sind genau dann orthogonal (suborthogonal), wenn ihre Ordnungen teilerfremd sind.

Die Suborthogonalität läßt sich auch so charakterisieren:

LEMMA 2.4. Genau dann ist $H \not\to K$, wenn jeder nilpotente Subnormalteiler von K, der epimorphes Bild von H ist, trivial ist.

Beweis. Wir zeigen: Eine nilpotente Gruppe $N \neq 1$ besitzt einen abelschen Normalteiler $A \neq 1$, der epimorphes Bild von N ist. Sei dazu c die Klasse von N, $N = N_1 \rhd \ldots \rhd N_{c+1} = 1$ die absteigende Zentralreihe von N. Ist $c = 1$, so ist N abelsch und nichts zu beweisen. Sei also $c > 1$. Dann ist $N_c = \gamma N_{c-1} N \neq 1$ und $N_c \leqslant Z(N)$. Folglich existiert ein $x \in N_{c-1}$, $x \notin Z(N)$. Durch

$$g \longmapsto [g,x] \quad (g \in N)$$

wird eine Abbildung φ von N in Z(N) definiert. Unter Anwendung von (2) ist: $\varphi(g_1 g_2) = [g_1 g_2, x] = [g_1, x][g_2, x]$. Daher ist φ ein Endomorphismus von N. Das Bild von N unter φ ist ein in Z(N) gelegener abelscher Normalteiler $A \neq 1$.

Ist nun $H \not\to K$, so hat K keinen nilpotenten Subnormalteiler $N \neq 1$, der epimorphes Bild von H ist, denn sonst gäbe es einen abelschen Normalteiler $A \neq 1$ von N, der epimorphes Bild von N und damit von H wäre. Wegen $A \lhd N \lhd \lhd K$ wäre $A \lhd \lhd K$.

Die andere Richtung ist trivial. q.e.d.

KOROLLAR 2.5. Sei H eine Gruppe, K eine nilpotente Gruppe, die von homomorphen Bildern von H erzeugt wird. Dann hat $H \not\to K$ notwendig $K = 1$ zur Folge.

LEMMA 2.6. Seien H und K Gruppen, und sei $H \not\to K/Z_m(K)$ für eine nicht-negative ganze Zahl m. Dann ist $H \not\to K/Z_n(K)$ für alle $n \geqslant m$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n-m. Für $n = m$ ist nichts zu beweisen. Sei $n > m$ und angenommen, daß H suborthogonal zu $K/Z_{n-1}(K)$ ist. Wir setzen $K_* = K/Z_{n-1}(K)$ und $Z_* = Z(K_*)$. Nach unserer Induktionsannahme ist $H \not\to K_*$ und zu zeigen ist, daß dann $H \not\to K_*/Z_*$ ist. Ist $Z_* = K_*$, so ist dies trivialerweise richtig. Sei also $Z_* < K_*$ und $N/Z_* \neq 1$ ein abelscher Subnormalteiler von K_*/Z_*. Wir zeigen, daß es eine abel-

sche subnormale Untergruppe $A \neq 1$ von K_* gibt, die epimorphes Bild von N/Z_* ist.

Sei r der Defekt von N in K_* und $N = N_0 \lhd \ldots \lhd N_r = K_*$ die Normenkette. Wegen $K_* > Z_*$ ist jedenfalls K_* nicht abelsch. Folglich gibt es eine kleinste nicht-negative ganze Zahl u derart, daß N_u nicht-abelsch ist. Es ist $u \leqslant 2$, denn ist der Defekt $r \geqslant 2$, dann ist N_2 nicht-abelsch. Sonst wäre nämlich $N \lhd N_2$ im Widerspruch zur Konstruktion der Normenkette.

Wir zeigen, daß $\gamma N_u N \neq 1$ ist: Im Falle $u = 0$ ist N nicht abelsch, also $N' = \gamma NN \neq 1$. Ist $u = 2$, dann ist $r \geqslant 2$, daher $\gamma N_2 N \not\leqslant N$, da N nicht normal in N_2 ist. Es bleibt der Fall $u = 1$ zu untersuchen. Es kann $\gamma N_1 N = 1$ nur gelten, wenn $N_1 < K_*$ ist, denn wir haben $N > Z_*$ vorausgesetzt. Wäre also $\gamma N_1 N = 1$, dann wäre $N_1 = N^{N_2}$. Da $N_1 \lhd N_2$ ist, wäre ferner nach (6) auch $\gamma N_1 N^y = 1$ für alle $y \in N_2$. Daraus folgte aber, daß N_1 sogar das Erzeugnis N^{N_2} zentralisierte. Also ergäbe sich $N_1' = \gamma N_1 N_1 = 1$ im Widerspruch zur Vorgabe $u = 1$.

Wir zeigen, daß $\gamma N_u N$ abelsch ist und im Zentralisator von N in K_* liegt: Im Falle $u = 0$ ist dies richtig, da $N' \leqslant Z_*$ ist, denn wir haben N/Z_* als abelsch vorausgesetzt. Ist $u > 0$, dann ist $\gamma N_u N \leqslant N_{u-1}$. Nach der Bestimmung von u ist N_{u-1} abelsch. Wegen $N \leqslant N_{u-1}$ liegen daher N und $\gamma N_u N$ in der abelschen Gruppe N_{u-1}. Also zentralisieren sie sich.

Da $\gamma N_u N \neq 1$ ist, gibt es ein $x \in N_u$, das nicht mit allen Elementen von N vertauschbar ist. Da $\gamma N_u N$ von N zentralisiert wird, ist die Abbildung $g \longmapsto [g,x]$ $(g \in N)$ ein Homomorphismus von N in die abelsche Gruppe $\gamma N_u N$, wie man wiederum mit (2) bestätigt. Das Bild A von N unter diesem Homomorphismus ist nicht-trivial. Da $\gamma N_u N$ abelsch und subnormal in K_* ist, gilt ferner: $A \lhd \lhd K_*$. Schließlich wird bei diesem Homomorphismus jedes Element von Z_* auf das neutrale Element abgebildet, folglich ist A ein epimorphes Bild von N/Z_*. q.e.d.

Man kann nicht von $H \hookrightarrow K/Z_m(K)$ schließen auf $H \hookrightarrow K/Z_n(K)$ für $n < m$. Dies macht man sich am Beispiel

zweier endlicher p-Gruppen klar. Für orthogonale Gruppen gilt jedoch

LEMMA 2.7. Seien H und K orthogonale Gruppen, und sei $H \hookrightarrow K/Z_m(K)$ für eine natürliche Zahl m. Dann ist $H \hookrightarrow K/Z_n(K)$ für alle $n \geq 1$.

Beweis. Nach Lemma 2.6. genügt es zu zeigen, daß $H \hookrightarrow K/Z(K)$ ist. Es kann $m > 1$ angenommen werden. Wir zeigen durch Induktion nach m-n, daß $H \hookrightarrow K/Z_n(K)$ für $1 \leqslant n \leqslant m$ ist. Für $m = n$ ist dies nach Voraussetzung richtig. Sei schon erwiesen, daß $H \hookrightarrow K/Z_{n+1}(K)$ ist $(1 \leqslant n < m)$. Wir setzen $K_* = K/Z_{n-1}(K)$, $Z = Z(K_*)$ und $Z_2 = Z_2(K_*)$. Nach unserer Induktionsvoraussetzung ist $H \hookrightarrow K_*/Z_2$. Wir zeigen, daß dann $H \hookrightarrow K_*/Z$.

Sei A/Z eine abelsche subnormale Untergruppe von K_*/Z, die epimorphes Bild von H ist. Es ist $AZ_2/Z_2 \cong A/A \cap Z_2$, also ist AZ_2/Z_2 ein epimorphes Bild von A/Z und damit von H. Da $AZ_2/Z_2 \trianglelefteq\trianglelefteq K_*/Z_2$ und nach Induktionsvoraussetzung $H \hookrightarrow K_*/Z_2$ ist, folgt $A \leqslant Z_2$. Daher ist $\mathfrak{k}AK_* \leqslant Z$.

Wir betrachten die Abbildung f von A/Z und K_* in Z, die definiert ist durch:

$$f(Za,k) = [a,k] \quad (a \in A,\ k \in K_*).$$

Die Abbildung f ist wohldefiniert, der Beweis dafür ist analog zu [13, Lemma 13.1.]: Sind a_1, a_2 in derselben Nebenklasse von A modulo Z, dann ist $[a_1 a_2^{-1}, k] = 1$. Da $\mathfrak{k}AK_* \leqslant Z$ ist, gilt mit (2): $[a_1 a_2^{-1}, k] = [a_1, k][a_2^{-1}, k]$, sowie $[a_2^{-1}, k][a_2, k] = 1$. Folglich ist $[a_1, k] = [a_2, k]$, und f ist wohldefiniert.

Ganz ähnlich zeigt man mit (2) und (3), daß f eine bihomomorphe Abbildung ist. Nach Voraussetzung ist aber $H \perp K$. A/Z ist nach Vorgabe ein homomorphes Bild von H, K_* ist ein homomorphes Bild von K. Nach Lemma 2.1.(e) ist also A/Z orthogonal zu K_*. Damit folgt nun $\mathfrak{k}AK_* = 1$. Daher ist A = Z, also wie behauptet $H \hookrightarrow K_*/Z$. q.e.d.

KOROLLAR 2.8. Seien H und K orthogonale Gruppen, K nilpotent, Dann ist $H \hookrightarrow K/Z(K)$.

Ist nämlich c die Klasse von K, so ist trivialerweise H suborthogonal zu $K/Z_c(K)$.

3. NILGRUPPEN UND NACHAUFLÖSBARE GRUPPEN

Die wichtigsten Verallgemeinerungen der nilpotenten Gruppen sind die lokal-nilpotenten Gruppen und die Nilgruppen. Eine Gruppe heißt nach BAER [8] eine Nilgruppe, falls jede zyklische Untergruppe subnormal ist. Jede nilpotente Gruppe ist Nilgruppe. Untergruppen und homomorphe Bilder von Nilgruppen sind Nilgruppen.

Während das Erzeugnis beliebig vieler nilpotenter Normalteiler im allgemeinen nicht nilpotent ist, ist das Erzeugnis beliebig vieler lokal-nilpotenter Normalteiler lokal-nilpotent (HIRSCH [9]), sowie das Erzeugnis normaler Niluntergruppen wieder Nilgruppe (BAER [8, §3. Satz 1]). Darauf beruht nicht zuletzt die Nützlichkeit der beiden Verallgemeinerungen. In jeder Gruppe G existiert demnach ein größter lokal-nilpotenter Normalteiler, das sogenannte Hirsch-Radikal, und eine größte normale Niluntergruppe, das sogenannte Baer-Radikal $\mathfrak{B}(G)$.

Nach ZASSENHAUS [11, p. 245] heißt eine Gruppeneigenschaft π normal (subnormal) persistent, falls jedes Erzeugnis von Normalteilern (Subnormalteilern) mit der Eigenschaft π wieder die Eigenschaft π besitzt. Normale Persistenz impliziert subnormale Persistenz [11, p. 246]. Die Gruppeneigenschaften, lokal-nilpotent bzw. Nilgruppe zu sein, sind folglich subnormal persistent. Daher gilt:

LEMMA 3.1. Das Erzeugnis beliebig vieler subnormaler Niluntergruppen (lokal-nilpotenter Subnormalteiler) ist Nilgruppe (lokal-nilpotent).

Eine Nilgruppe wird erzeugt durch zyklische Subnormalteiler, ist daher nach Lemma 3.1. lokal-nilpotent. Insbesondere ist das Baer-Radikal einer Gruppe stets im Hirsch-Radikal enthalten.

Wir verschärfen einen Satz von P. HALL [7, Theorem 4]. Der Beweis ist ganz analog jenem von HALL, der gezeigt hat, daß unter den Voraussetzungen des folgenden Theorems die Kommutatorgruppe γHK lokal-nilpotent ist:

THEOREM 3.2. Sind H und K Untergruppen einer Gruppe G, und ist $\gamma HK^m = 1$ für eine natürliche Zahl m, dann ist $H^K \cap K^H$ eine Nilgruppe.

Beweis. Sei $J = \langle H,K \rangle$. Wegen der Voraussetzung $\gamma HK^m = 1$ ist nach Lemma 1.1. K subnormal in J. Da $\gamma HK \leqslant H^K$ ist, ist nach Dedekind [12, S. 8] und (5):

$$H^K \cap K^H = \gamma HK\,(H^K \cap K). \qquad (7)$$

$H^K \cap K$ ist normal in K, also subnormal in J. Wir zeigen, daß $H^K \cap K$ nilpotent und γHK eine Nilgruppe ist. Daraus ergibt sich dann die Behauptung unmittelbar aus (7) und Lemma 3.1..

Wir zeigen zunächst, daß $K_1 = H^K \cap K$ nilpotent ist: Da $\gamma HK \lhd J$ ist, ist nach (6) $\gamma HK = \gamma H^k K$ für jedes $k \in K$. Also ist jede Konjugierte H^k mit K modulo γHK elementweise vertauschbar. Folglich ist sogar das Erzeugnis H^K mit K modulo γHK elementweise vertauschbar, d.h. es ist $\gamma HK = \gamma H^K K$. Nach Voraussetzung ist damit $\gamma H^K K^m = 1$. Wegen $K_1 \leqslant K$ folgt $\gamma H^K K_1^m = 1$. Da $K_1 \leqslant H^K$ ist, ergibt sich schließlich $\gamma K_1^{m+1} = 1$, d.h. K_1 ist nilpotent.

Wir zeigen nun, daß γHK eine Nilgruppe ist: Sei C der Zentralisator von H^K in K^H. Da H^K und K^H normal in J sind, ist $C \lhd J$. Aus $\gamma H^K K^m = 1$ folgt nach Lemma 1.3. $\gamma K^{n+1} H^K = 1$ für $n = m(m-1)/2$. Also ist $\gamma K^{n+1} \leqslant C$, und daher ist $KC/C \cong K/K \cap C$ nilpotent. Da $C \lhd J$ ist und $K \lhd\lhd J$ ist, ist nach Lemma 3.1. die normale Hülle $K^H/C = (KC)^H/C$ eine Nilgruppe, denn es ist $KC/C \lhd\lhd J/C$. Da Untergruppen von Nilgruppen wieder Nilgruppen sind, ist $C\,\gamma HK/C$ Nilgruppe. Ferner ist $\gamma HK/\gamma HK \cap C \cong C\,\gamma HK/C$, und da $\gamma HK \leqslant H^K$ ist, liegt $\gamma HK \cap C$ im Zentrum Z von γHK. Folglich ist $\gamma HK/Z$ Nilgruppe.

Wir zeigen, daß jedes Element x von γHK eine subnormale Untergruppe erzeugt. Da $\gamma HK/Z$ Nilgruppe ist, ist $\gamma(\gamma HK)\langle x \rangle^s \leqslant Z$ für eine geeignete natürliche Zahl s. Damit ist $\gamma(\gamma HK)\langle x \rangle^{s+1} = 1$, folglich γHK eine Nilgruppe. q.e.d.

Das Baer-Radikal $\beta(K)$ der Gruppe K ist das Erzeugnis der abelschen subnormalen Untergruppen von K. Ist die Gruppe H orthogonal zu jedem abelschen Subnormalteiler von K, dann ist

nach Lemma 2.1.(f) $H \perp \beta(K)$. Umgekehrt läßt sich aus $H \perp \beta(K)$ im allgemeinen nicht erschließen, daß H orthogonal zu jedem abelschen Subnormalteiler von K ist: Jede echte Untergruppe von C_{p^∞} (p Primzahl) ist eine endliche zyklische Gruppe von p-Potenzordnung. Nach Lemma 2.1.(g) ist zwar $C_p \perp C_{p^\infty}$, aber nach Lemma 2.1.(d) ist C_p zu keiner echten Untergruppe von C_{p^∞} orthogonal.

Diese Umkehrung gilt jedoch, falls man $\beta(K) \in \overline{\mathfrak{m}}$ voraussetzt. Um dies zu beweisen, benötigen wir

LEMMA 3.3. Sei G eine Nilgruppe, $G \in \overline{\mathfrak{m}}$ und G/G' eine endliche Gruppe. Dann ist G selbst endlich.

Beweis. Nach BAER [8, §5. Satz 1] ist eine Nilgruppe, die die Maximalbedingung für subnormale Untergruppen erfüllt, nilpotent. Folglich ist G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe. Sei $G = gp\{x_1, \ldots, x_r\}$, $M = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Sei ferner c die Klasse von G und $G = G_1 \rhd \ldots \rhd G_{c+1} = 1$ die absteigende Zentralreihe. Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach c. Für $c \leqslant 1$ ist nichts zu beweisen, sei daher $c > 1$ und angenommen, daß G/G_c endlich sei.

Nach [12, S. 258] ist $G_c = gp\{[y_1, \ldots, y_c] : y_i \in M\}$, d.h. G_c wird durch höchstens r^c Elemente erzeugt. Nach [12, S. 266] teilt der Exponent von G_c den Exponenten von G_{c-1}/G_c. Da nach Induktionsvoraussetzung G/G_c endlich ist, wird G_c nun von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt, ist daher als abelsche Gruppe endlich. Damit ist G endlich. q.e.d.

LEMMA 3.4. Seien H und K Gruppen, sei $\beta(K) \in \overline{\mathfrak{m}}$ und H orthogonal zu $\beta(K)$. Dann ist H orthogonal zu jedem abelschen Subnormalteiler von K.

Beweis. Wir setzen $B = \beta(K)$. Wegen $B \in \overline{\mathfrak{m}}$ ist B ein endlich erzeugter nilpotenter Normalteiler von K [8, §5. Satz 1]. B/B' ist auf Grund des Basis-Theorems für abelsche Gruppen direktes Produkt endlich vieler zyklischer Gruppen. Ist B/B' eine unendliche Gruppe, dann ist nach Lemma 2.1.(e) $H \perp C_\infty$, also H nach Lemma 2.1.(a) notwendig perfekt. Eine perfekte

Gruppe ist orthogonal zu jeder anderen Gruppe.

Wir können daher annehmen, daß B/B' endlich ist. Nach Lemma 3.3. ist dann B selbst endlich, also direktes Produkt ihrer Sylowgruppen. Nach Lemma 2.1.(e) ist $H \perp C_p$ für jeden Primteiler p von $|B|$, denn B besitzt einen Normalteiler vom Index p. Jeder abelsche Subnormalteiler von K liegt in B und wird durch zyklische subnormale Untergruppen von Primzahlpotenzordnung erzeugt. Bei Berücksichtigung von Lemma 2.1.(f) genügt es daher zu zeigen, daß $H \perp C_{p^m}$ für jeden Primteiler p von $|B|$ und jede natürliche Zahl m ist.

Sei $H_* = H/H'$, $H_*^p = \{h^p : h \in H_*\}$. Da $H \perp C_p$ ist, ist nach Lemma 2.1.(b) $H_* = H_*^p$. Daraus folgt sogar $H_* = H_*^{p^m}$, und wiederum nach Lemma 2.1.(b) ergibt sich $H \perp C_{p^m}$. q.e.d.

Da das Erzeugnis zweier auflösbarer Subnormalteiler im allgemeinen nicht auflösbar ist, hat BAER [8] einen verallgemeinerten Auflösbarkeitsbegriff eingeführt:

DEFINITION 3.5. Eine Gruppe heißt nachauflösbar, wenn jedes homomorphe Bild $\neq 1$ eine nicht-triviale abelsche subnormale Untergruppe besitzt.

Nach BAER [8, §4] sind Untergruppen und homomorphe Bilder nachauflösbarer Gruppen nachauflösbar. Nilgruppen sind definitionsgemäß nachauflösbar. Während Erweiterungen von Nilgruppen durch Nilgruppen im allgemeinen keine Nilgruppen sind, sind Erweiterungen von nachauflösbaren Gruppen durch nachauflösbare Gruppen nachauflösbar.

Ferner sind nach BAER Produkte nachauflösbarer Normalteiler nachauflösbar. Die Nachauflösbarkeit ist also eine Gruppeneigenschaft, die normal und damit subnormal persistent ist. Folglich gilt:

LEMMA 3.6. Das Erzeugnis nachauflösbarer Subnormalteiler ist nachauflösbar.

Bei geeigneten Kettenbedingungen ist eine nachauflösbare Gruppe auflösbar. Wir erwähnen ein Ergebnis von BAER: Eine nachauflösbare Gruppe in $\mathfrak{m}$ ist auflösbar [8, 4. Satz].

Wir geben eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die normale Hülle eines auflösbaren Subnormalteilers auflösbar ist:

LEMMA 3.7. Sei H eine auflösbare subnormale Untergruppe einer Gruppe G. Genau dann ist H^G auflösbar, wenn die Menge $\mu = \{H^T: T \leq G, H^T \lhd\lhd G, H^T \text{ auflösbar}\}$ ein maximales Element besitzt.

Beweis. Ist H^G auflösbar, so ist H^G ein maximales Element in μ. Sei umgekehrt $M = H^T$ $(T \leq G)$ ein maximales Element in μ. Unter Anwendung der Schlußweise von [13, Lemma 10.4] zeigen wir, daß dann $M = H^G$ ist.

Zunächst weisen wir nach, daß $M \lhd G$ ist. Dafür nehmen wir an, daß M kein Normalteiler von G ist. Da $M \in \mu$ ist, ist $M \lhd\lhd G$. Nach unserer Annahme ist der Defekt r von M in G > 1. Sei $M = M_0 \lhd \ldots \lhd M_r = G$ die Normenkette. Dann ist M kein Normalteiler von M_2, es gibt also ein $x \in M_2$, so daß $M^x \not\leq M$ ist. Das Produkt eines auflösbaren Normalteilers mit einer auflösbaren Untergruppe ist bekanntlich auflösbar. Da M und M^x normal in M_1 sind, ist MM^x auflösbar. Ferner ist $MM^x \lhd M_1 \lhd\lhd G$, also $MM^x \lhd\lhd G$. Wegen $MM^x = H^{T_0}$ für $T_0 = T \cup \{x\}$ ist MM^x daher ein Element von μ. Da $M < MM^x$ ist, widerspricht dies aber der Maximalität von M. Also ist $M \lhd G$.

Wegen $M \lhd G$ ist HM auflösbar. Da das Erzeugnis zweier vertauschbarer Subnormalteiler subnormal ist, ist $HM \lhd\lhd G$. Daher ist $HM \in \mu$, und die Maximalität von M hat $H \leq M$ zur Folge. H^G ist nun der kleinste Normalteiler von G, der H enthält, folglich ist $H^G \leq M$. Andererseits ist $H^G \geq H^T = M$ wegen $T \leq G$. Daraus folgt $M = H^G$, also ist H^G auflösbar. q.e.d.

Bemerkung. Ist in Lemma 3.7. $G \in \overline{\mathfrak{m}}$, dann besitzt die Menge μ per definitionem ein maximales Element. Dasselbe gilt, falls $G \in \underline{\mathfrak{m}}$ ist, denn nach ROSEBLADE [3, Theorem 3] besitzt H dann nur endlich viele Konjugierte unter G. Ist also $G \in \overline{\mathfrak{m}} \cup \underline{\mathfrak{m}}$, dann ist die normale Hülle eines auflösbaren Subnormalteilers von G auflösbar.

4. ÜBER DIE STRUKTUR DES ERZEUGNISSES ZWEIER SUBNORMALTEILER

Es seien H und K Untergruppen einer Gruppe G, J ihr Erzeugnis. Dann ist $hk \equiv kh \mod \gamma HK$ $(h \in H, k \in K)$. Sei ferner $H \times K$ das direkte Produkt von H und K, definiert in der üblichen Weise als Menge der geordneten Paare (h,k) bei komponentenweiser Multiplikation. Dann ist die Zuordnung

$$(h,k) \longmapsto hk \; \gamma HK$$

ein Homomorphismus von $H \times K$ auf $J/\gamma HK$. Ist die Struktur von H und K bekannt, dann ist die von $H \times K$ weitgehend bestimmt. Zur Untersuchung der Struktur von J ist es daher wichtig, Kenntnisse über die von γHK zu gewinnen.

Sind H und K subnormale Untergruppen, so lassen sich über die Kommutatorgruppe γHK und den γHK enthaltenden Durchschnitt $H^K \cap K^H$ einige interessante Aussagen machen, vorausgesetzt der Durchschnitt von H und K ist wenigstens nachauflösbar. Eine einfache Anwendung von Theorem 3.2. liefert uns das erste Ergebnis:

LEMMA 4.1. Seien H und K subnormale Untergruppen einer Gruppe G, sei $H \lhd \langle H,K \rangle$ und $H \cap K \leqslant Z_n(K)$ für eine natürliche Zahl n. Dann ist $H^K \cap K^H \leqslant \mathfrak{B}(G)$.

Beweis. Sei $J = \langle H,K \rangle$. Da $H \lhd J$ ist, ist $\gamma HK^m \leqslant H$ für jede natürliche Zahl m. Wegen $K \lhd \lhd J$ ist nach Lemma 1.1. $\gamma HK^s \leqslant K$ für eine geeignete natürliche Zahl s. Damit ist $\gamma HK^s \leqslant H \cap K$, also nach Voraussetzung $\gamma HK^s \leqslant Z_n(K)$. Folglich ist $\gamma HK^{s+n} = 1$, und nach Theorem 3.2. ist daher $H^K \cap K^H$ eine Nilgruppe. Da nach Voraussetzung $H \lhd J$ ist, ist $J = HK \lhd \lhd G$. Damit ist auch $H^K \cap K^H$ subnormal in G, denn $H^K \cap K^H$ ist ein Normalteiler von J. Als subnormale Untergruppe von liegt aber die Nilgruppe $H^K \cap K^H$ nach Lemma 3.1. in $\mathfrak{B}(G)$. q.e.d.

Es folgen zwei Sätze, bei denen der Defekt eines der beiden Subnormalteiler $\leqslant 2$ vorausgesetzt wird. Diese werden als

Hilfssätze zum Beweis von Lemma 6.1. und Theorem 6.4. bzw. von Theorem 6.6. herangezogen werden.

LEMMA 4.2. Seien H und K subnormale Untergruppen von $J = \langle H,K\rangle$, sei $H \lhd H^K$ und $H \cap K \leqslant Z_n(K)$ für eine natürliche Zahl n. Dann ist $H^K \cap K$ nilpotent von einer Klasse $\leqslant (m+n)(m+n-1)/2 + 1$; dabei ist $m = s(J:K)$.

Beweis. Im Falle $m = 0$ ist $K = J$, also nach Voraussetzung $H \leqslant Z_n(K)$ und damit H^K nilpotent von einer Klasse $\leqslant n$. Da $n \leqslant n(n-1)/2 + 1$ ist, ist auch die Abschätzung richtig.

Sei nun $m > 0$. Wir setzen $K_1 = H^K \cap K$. Es ist $K_1 \lhd \lhd H^K$ vom Defekt $\leqslant m$, folglich ist $\gamma HK_1^m \leqslant K_1$. Da $H \lhd H^K$ vorausgesetzt ist, ist $\gamma HK_1^s \leqslant H$ für jede natürliche Zahl s. Daher ist $\gamma HK_1^m \leqslant H \cap K_1$, also nach Voraussetzung $\gamma HK_1^m \leqslant Z_n(K)$. Damit ist $\gamma HK_1^{m+n} = 1$, und aus Lemma 1.3. folgt $\gamma K_1^{r+1} H = 1$ für $r = (m+n)(m+n-1)/2$. K_1 ist normal in K, als charakteristische Untergruppe von K_1 ist daher γK_1^{r+1} normal in K. Für jedes $k \in K$ gilt also $\gamma K_1^{r+1} H^k = 1$; folglich zentralisiert γK_1^{r+1} die normale Hülle H^K. Wegen $K_1 \leqslant H^K$ ergibt sich wie behauptet $\gamma K_1^{r+2} = 1$. q.e.d.

LEMMA 4.3. Seien H und K Subnormalteiler von $J = \langle H,K\rangle$, sei $H \lhd H^K$ und $(H \cap K)^K$ auflösbar. Dann ist H^K/H auflösbar.

Beweis. Nach (4) ist $\gamma KH^2 \lhd H\,\gamma KH = H^K$, daher ist $(\gamma KH^2)^K \lhd H^K K = J$. Unter Anwendung von (6) gilt für jedes $k \in K$: $[\gamma KH, H^k] = (\gamma KH^2)^k \leqslant (\gamma KH^2)^K$. Folglich ist γHK modulo $(\gamma KH^2)^K$ sogar mit H^K elementweise vertauschbar, d.h. es ist $[\gamma KH, H^K] \leqslant (\gamma KH^2)^K$. Da $[\gamma KH, H^K] \lhd H^K$ ist, ist mit (2) $(H^K)' = [H\,\gamma KH, H^K] = [\gamma KH, H^K][H, H^K]$. Wegen der Voraussetzung $H \lhd H^K$ gilt also:

$$(H^K)' \leqslant H\,(\gamma KH^2)^K. \qquad (8)$$

Sei m der Defekt von K in J. Im Falle $m \leqslant 1$ ist $\gamma KH^r \leqslant K$ für jede natürliche Zahl r. Wegen $s(J:H) \leqslant 2$ ist demnach $\gamma KH^2 \leqslant H \cap K$. Nach Voraussetzung ist also $(\gamma KH^2)^K$ auflösbar, und die Behauptung folgt aus (8).

Sei nun $m > 1$. Wir setzen $H_1 = K^H \cap H$, $J_1 = \langle H_1, K\rangle$. Wir

führen den Beweis fort, indem wir Induktion nach m anwenden. Unsere Induktionsannahme lautet: Wenn $X \lhd X^Y$, $Y \lhd\lhd \langle X,Y\rangle$, $(X\cap Y)^Y$ auflösbar und $s(\langle X,Y\rangle:Y) < m$ ist, dann ist X^Y/X auflösbar. Diese Voraussetzungen erfüllen H_1 und K in J_1: Wegen $J_1 \leqslant K^H$ ist $s(J_1:K) < m$. Da $H \lhd H^K$ ist, ist $H_1 \lhd H_1^K$, und schließlich ist $(H_1\cap K)^K$ auflösbar, weil $(H_1\cap K)^K = (H\cap K)^K$ ist. Daher nehmen wir an, daß H_1^K/H_1 auflösbar ist.

Wegen der Voraussetzung $H \lhd H^K$ ist $\gamma KH^2 \leqslant H$. Andererseits ist $\gamma KH^2 \leqslant K^H$, also ist $\gamma KH^2 \leqslant K^H\cap H = H_1$. Insbesondere ist $(\gamma KH^2)^K \leqslant H_1^K$, und aus (8) folgt $(H^K)' \leqslant HH_1^K$. Da $HH_1^K/H \cong H_1^K/H_1$ und nach Induktionsvoraussetzung H_1^K/H_1 auflösbar ist, ergibt sich die Behauptung. q.e.d.

THEOREM 4.4. Für subnormale Untergruppen H und K einer Gruppe G mit nachauflösbarem Durchschnitt gilt: $H^K\cap K^H$ ist nachauflösbar, und es ist ferner $H^K\cap K^H\cap ß(G) \neq 1$, außer wenn $H^K\cap K^H = 1$ ist.

Beweis. Es sei $J = \langle H,K\rangle$ gesetzt. Wir beweisen den Satz in drei Schritten.

(a) Wir zeigen, daß $H^K\cap K$ nachauflösbar ist:

Der Beweis wird geführt durch Induktion nach dem Defekt r von H in J. Für $r \leqslant 1$ ist nichts zu beweisen, da hierbei $H^K = H$ ist. Sei daher $r > 1$. Unsere Induktionsannahme lautet: Wenn $L = \langle X,Y\rangle$, $X \lhd\lhd L$, $Y \lhd\lhd L$, $X\cap Y$ nachauflösbar und $s(L:X) < r$ ist, dann ist $X^Y\cap Y$ nachauflösbar.

Wir setzen $K_1 = H^K\cap K$ und $J_1 = \langle H,K_1\rangle$. Wegen $J_1 \leqslant H^K$ ist $s(J_1:H) < r$. Ferner ist $H\cap K_1 = H\cap K$ nachauflösbar, sowie K_1 subnormal in J_1. Also erfüllen H und K_1 in J_1 die Induktionsvoraussetzungen, und wir nehmen an, daß $H^{K_1}\cap K_1$ nachauflösbar ist. Zur Abkürzung sei $K_2 = H^{K_1}\cap K_1$ gesetzt. Es ist $K_2 \lhd K_1 \lhd K \lhd\lhd J$, also insbesondere $K_2 \lhd\lhd J$. Nach Lemma 3.6. ist folglich die normale Hülle K_2^J nachauflösbar. Da K_1 subnormal in J_1 ist, gibt es nach Lemma 1.1. eine natürliche Zahl m, so daß $\gamma HK_1^m \leqslant K_1$ ist. Für jede natürliche Zahl s ist aber $\gamma HK_1^s \leqslant H^{K_1}$, daher ist sogar $\gamma HK_1^m \leqslant H^{K_1}\cap K_1 = K_2$. Insbesondere ist:

$$\gamma HK_1^m \leqslant K_2^J . \qquad (9)$$

K_2^J ist Normalteiler von J. Wir rechnen modulo diesem Normalteiler unter Anwendung von (6). Nach Lemma 1.3. folgt aus (9) $\gamma K_1^{n+1} H \leqslant K_2^J$ für $n = m(m-1)/2$. Nun ist γK_1^{n+1} eine charakteristische Untergruppe von K_1, und K_1 ist normal in K. Folglich ist $\gamma K_1^{n+1} \triangleleft K$. Für jedes $k \in K$ ist also $\gamma K_1^{n+1} H^k \leqslant K_2^J$. Daher ist γK_1^{n+1} sogar mit H^K modulo dem Normalteiler K_2^J elementweise vertauschbar. Also ist sogar $\gamma K_1^{n+1} H^K \leqslant K_2^J$, und wegen $K_1 \leqslant H^K$ gilt:

$$\gamma K_1^{n+2} \leqslant K_2^J .$$

Nach unserer Induktionsvoraussetzung ist K_2 nachauflösbar. Da damit auch K_2^J nachauflösbar ist, ist also γK_1^{n+2} nachauflösbar. Da Erweiterungen von nachauflösbaren Gruppen durch nilpotente Gruppen nachauflösbar sind, ist wie behauptet K_1 nachauflösbar.

(b) Wir zeigen, daß $H^K \cap K^H$ nachauflösbar ist:
Nach dem Beweisteil (a) ist $H^K \cap K$ nachauflösbar. Da $H^K \cap K$ subnormal in J ist, ist nach Lemma 3.6. $(H^K \cap K)^J$ nachauflösbar. Für jede natürliche Zahl s ist $\gamma HK^s \leqslant H^K$. Wegen $K \triangleleft \triangleleft J$ gibt es eine natürliche Zahl t, so daß $\gamma HK^t \leqslant K$ ist. Daher ist $\gamma HK^t \leqslant H^K \cap K$. Insbesondere ist

$$\gamma HK^t \leqslant (H^K \cap K)^J . \qquad (10)$$

Die Rechnung modulo dem Normalteiler $(H^K \cap K)^J$ von J liefert nach Theorem 3.1., daß $H^K \cap K^H/(H^K \cap K)^J$ eine Nilgruppe ist. Da Erweiterungen von nachauflösbaren Gruppen durch Nilgruppen nachauflösbar sind, ist $H^K \cap K^H$ nachauflösbar.

(c) Sei nun $H^K \cap K^H \neq 1$. Wir zeigen, daß dann $H^K \cap K^H \cap \mathfrak{B}(G) \neq 1$: Ist $H^K \cap K \neq 1$, so ist nach der Definition der Nachauflösbarkeit $\mathfrak{B}(H^K \cap K) \neq 1$. Ferner ist $\mathfrak{B}(H^K \cap K) \leqslant \mathfrak{B}(G)$, da $H^K \cap K$ subnormal in G ist. In diesem Falle ist die Behauptung daher richtig, und wir können uns auf den Fall beschränken, daß $H^K \cap K = 1$ ist. Aus (10) und Theorem 3.2. folgt, daß dann

$H^K \cap K^H$ sogar eine Nilgruppe ist.

Nach unserer Voraussetzung ist $H^K \cap K^H \neq 1$. Da wir ferner $H^K \cap K = 1$ angenommen haben, ist sicherlich $K^H > K$, d.h. es ist $s = s(J:K) \geqslant 2$. Sei $K = K_0 \lhd \ldots \lhd K_s = J$ die Normenkette von K in J. Dann gibt es ein $x \in K_2$, so daß $K^x \not\leqslant K$ ist. Da K und K^x normal in K_1 und subnormal in G sind, ist KK^x ein Subnormalteiler von G. Da $KK^x \ll K^H$ ist, ist $H^K \cap KK^x$ eine in $H^K \cap K^H$ gelegene Niluntergruppe von G. Wir beenden den Beweis, indem wir zeigen, daß $H^K \cap KK^x$ eine nicht-triviale subnormale Untergruppe von G ist.

Da $H^K \lhd J$ ist, ist $H^K \cap KK^x \lhd KK^x$. Weil $KK^x \lhd \lhd G$ ist, ist auch $H^K \cap KK^x$ subnormal in G. Nach Vorgabe von x ist $K < KK^x$. Nach Dedekind [12, S. 8] ist andererseits

$$K(H^K \cap KK^x) = KK^x \cap H^K K = KK^x.$$

Daraus schließt man, daß $H^K \cap KK^x \neq 1$ ist. q.e.d.

Bemerkung. Ist in Theorem 4.4. $H \cap K$ auflösbar und das Erzeugnis $\langle H,K \rangle \in \overline{\mathfrak{m}} \cup \underline{\mathfrak{m}}$, dann ist $H^K \cap K^H$ sogar auflösbar. Dies ergibt sich aus dem Beweisgang unter Anwendung von Lemma 3.7. bzw. der daran anschließenden Bemerkung.

Wir ziehen abschließend zwei Folgerungen aus Theorem 4.4.:

KOROLLAR 4.5. Seien H und K disjunkte, vertauschbare Subnormalteiler einer Gruppe G. Genau dann ist $H \lhd \langle H,K \rangle$, wenn $H^K \cap \mathfrak{B}(K) = 1$ ist.

Beweis. Ist $H \lhd \langle H,K \rangle$, dann ist $H^K \cap K = H \cap K = 1$. Sei umgekehrt $H^K \cap \mathfrak{B}(K) = 1$. Nach Theorem 4.4. ist $H^K \cap K$ ein nachauflösbarer Normalteiler von K. Wäre $H^K \cap K \neq 1$, dann wäre $1 \neq \mathfrak{B}(H^K \cap K) \ll H^K \cap \mathfrak{B}(K)$, also $H^K \cap \mathfrak{B}(K) \neq 1$. Folglich ist $H^K \cap K = 1$. Wegen der Voraussetzung $HK = KH$ ist jedoch $H^K = H(H^K \cap K)$. Damit ergibt sich $H^K = H$. q.e.d.

KOROLLAR 4.6. Genau dann zentralisieren sich zwei disjunkte subnormale Untergruppen H und K einer Gruppe G, wenn $H^K \cap K^H \cap \mathfrak{B}(G) = 1$ ist.

5. NOTWENDIGE BEDINGUNGEN

Wir befassen uns nun mit der Frage, welche Voraussetzungen über die Strukturen zweier abstrakter Gruppen H und K notwendig sind, damit H von K bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung in eine Gruppe G normalisiert bzw. zentralisiert wird. Da eine disjunkte Einbettung H- und K-zentral ist, erhalten wir dadurch auch notwendige Bedingungen für solche allgemeineren Einbettungen.

Ein wichtiges Resultat zu unserer Fragestellung verdanken wir ROSEBLADE [4, Theorem 3], das wir zitieren wollen:

THEOREM 5.1. Zu zwei abstrakten Gruppen H und K gibt es eine einbettende Gruppe $G = \langle H,K \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\gamma KH^2 = \gamma HK^2 = 1$.

(ii) $H \cap K^H = K \cap H^K = 1$.

(iii) $\gamma HK \cong H \otimes K$.

Folgerungen. Aus der Eigenschaft (i) entnimmt man, daß H und K subnormale Untergruppen von G jeweils vom Defekt $\leqslant 2$ sind. Wegen (ii) sind H und K disjunkt, und wegen (iii) zentralisieren sich H und K nur dann, wenn $H \perp K$ ist. Theorem 5.1. sagt sogar mehr aus: Ist nämlich HK = KH, dann folgt aus (ii) $H^K = H(H^K \cap K) = H$, d.h. $\gamma HK \leqslant H$. Ebenso zeigt man, daß $\gamma HK \leqslant K$ ist. Folglich ist $\gamma HK = 1$. Daher ist die Bedingung $H \perp K$ schon für den Fall der Vertauschbarkeit von H und K notwendig, insbesondere also dafür, daß H von K normalisiert wird.

Um eine weitere notwendige Bedingung zu finden, betrachten wir semidirekte Produkte zweier Gruppen. Gegeben seien zwei abstrakte Gruppen H und K und ein Homomorphismus σ von H in die Automorphismengruppe A(K) von K. Dann bilden die Symbole (h,k) für $h \in H$, $k \in K$ bei der Multiplikationsregel

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) = (h_1h_2, k_1^{\sigma(h_2)}k_2) \qquad (11)$$

eine Gruppe G [12, S. 89]. Die Elemente (h,1) bilden eine Untergruppe $H_o \cong H$, die Elemente (1,k) einen Normalteiler $K_o \cong K$, und es ist $G = H_oK_o$, $H_o \cap K_o = 1$. Nach (11) gilt:

$$(h,1)^{-1}(1,k)(h,1) = (1,k^{\sigma(h)}).$$

Der Automorphismus $\sigma(h)$ von K wird folglich durch Transformation mit dem Element $(h,1) \in H_o$ induziert. Identifiziert man $h = (h,1)$, $k = (1,k)$, dann gilt für den Kommutator:

$$[k,h] = k^{-1}\, k^{\sigma(h)}. \qquad (12)$$

Wir schreiben für das semidirekte Produkt von K mit H bei $\sigma \in \mathrm{Hom}(H,A(K))$ kurz $H \underset{\sigma}{\times} K$. Die wirkende Gruppe steht also immer links, und es ist $K \lhd H \underset{\sigma}{\times} K$. Ist speziell $N \leqslant A(K)$, so bezeichnen wir mit $N \underset{i}{\times} K$ das semidirekte Produkt von K mit N, wobei $i: N \longrightarrow A(K)$ die natürliche Injektion von N in A(K) ist.

Wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen über σ H subnormal in $H \underset{\sigma}{\times} K$ ist. Solch ein σ gibt es immer, denn ist $\sigma(h) = 1$ für alle $h \in H$, so erhalten wir das direkte Produkt $H \times K = H \underset{1}{\times} K$. Es gibt jedoch auch nicht-triviale Fälle:

LEMMA 5.2. Seien H und K Gruppen, σ ein Homomorphismus von H auf die Untergruppe N von A(K). Dann gilt bei Identifizierung der K's in $H \underset{\sigma}{\times} K$ bzw. $N \underset{i}{\times} K$: $\gamma_\infty KH^m = \gamma_\infty KN^m$ für jede natürliche Zahl m. Ferner ist genau dann $H \lhd\lhd H \underset{\sigma}{\times} K$, wenn N nilpotent und $N \lhd\lhd N \underset{i}{\times} K$ ist.

Beweis. Wir setzen $\sigma \in \mathrm{Hom}(H,A(K))$ fort zu einem Homomorphismus σ' von $H \underset{\sigma}{\times} K$ auf $N \underset{i}{\times} K$ durch die Festsetzung:

$$\sigma'(hk) = \sigma(h).k \qquad (h \in H,\ k \in K).$$

(Wir identifizieren die beiden K's in $H \underset{\sigma}{\times} K$ und $N \underset{i}{\times} K$ in natürlicher Weise!) Man bestätigt mit (11), daß σ' tatsächlich ein Homomorphismus ist. Nach (12) ist der Kern von σ' gerade der Zentralisator von K in H. Daher gilt $\sigma'(\gamma KH) \cong \gamma KH$. Andererseits ist nach (6) $\sigma'(\gamma KH) = \gamma K\, \sigma(H)$. Da γKH und γKN in K liegen, ist daher sogar $\gamma KH = \gamma KN$. Da ferner jedes Element von K unter σ' festbleibt, gilt für jede natürliche Zahl m:

$$\gamma KH^m = \gamma KN^m. \qquad (13)$$

Sei N jetzt ein nilpotenter Subnormalteiler von $N \underset{i}{\times} K$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $\gamma KN^n = 1$ ist. Aus (13) folgt $\gamma KH^n = 1$, also ist $H \lhd\lhd H \underset{\sigma}{\times} K$.

Ist umgekehrt H subnormal in $H \underset{\sigma}{\times} K$, so ist $\gamma KH^r \leqslant H$ für eine geeignete natürliche Zahl r. Da $K \lhd H \underset{\sigma}{\times} K$ ist, ist $\gamma KH^r \leqslant H \cap K = 1$. Aus (13) folgt also $\gamma KN^r = 1$, daher ist jedenfalls N subnormal in $N \underset{i}{\times} K$. Ferner ist nach Lemma 1.3. $\gamma N^{t+1} K = 1$ für $t = r(r-1)/2$. Das bedeutet aber, daß γN^{t+1} nur den identischen Automorphismus von K bewirkt. Folglich ist $\gamma N^{t+1} = 1$. q.e.d.

THEOREM 5.3. Gegeben seien zwei abstrakte Gruppen H und K. Sei ferner $N/Z(K)$ ein nilpotenter Subnormalteiler von $K/Z(K)$, der epimorphes Bild von H ist. Dann gibt es eine einbettende Gruppe $G = \langle H,K \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $K \lhd G$, $H \lhd\lhd G$.

(ii) $H \cap K = 1$.

(iii) $\gamma KH^m = \gamma KN^m$ für jede natürliche Zahl m.

Beweis. $N/Z(K)$ ist isomorph zu einer Untergruppe N_o der Gruppe der inneren Automorphismen von K. Da nach Voraussetzung $N/Z(K)$ ein epimorphes Bild von H ist, gibt es einen Homomorphismus α von H auf N_o. Sei $G = H \underset{\alpha}{\times} K$. Dann ist $H \cap K = 1$, und nach Lemma 5.2. gilt bei Identifizierung der K's $\gamma KH^m = \gamma KN_o^m = \gamma KN^m$ für jede natürliche Zahl m. Aus (iii) folgt nun direkt (i): Wegen $\gamma KH = \gamma KN \leqslant K$ ist $K \lhd G$. Da N

nach Voraussetzung ein nilpotenter Subnormalteiler von K ist, ist $\gamma_K H^n = \gamma_K N^n = 1$ für eine geeignete natürliche Zahl n. Also ist $H \lhd\lhd G$ nach Lemma 1.1.. Die Bedingung (ii) ist trivialerweise erfüllt. q.e.d.

Folgerungen. Ist in Theorem 5.3. $N > Z(K)$, dann ist $\gamma_K N \neq 1$ und daher $\gamma_K H \not\leq H$. Sonst wäre nämlich nach (ii) $\gamma_K N \leq H \cap K = 1$. In diesem Fall ist also H kein Normalteiler von G. Soll daher H von K bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung normalisiert werden, so darf $K/Z(K)$ keinen nilpotenten Subnormalteiler $\neq 1$ besitzen, der epimorphes Bild von H ist. Dies ist nach Lemma 2.4. gleichwertig mit $H \not\hookrightarrow K/Z(K)$. Entsprechendes gilt bei Vertauschung von H und K, d.h. H und K zentralisieren sich nur dann bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung, wenn $H \not\hookrightarrow K/Z(K)$ und $K \not\hookrightarrow H/Z(H)$ ist.

Unter Berücksichtigung von Lemma 2.6. und Lemma 2.7. können wir Theorem 5.1. und Theorem 5.3. so interpretieren:

THEOREM 5.4.(a) Nur dann wird die Gruppe H von der Gruppe K bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung normalisiert, wenn $H \perp K$ und $H \not\hookrightarrow K/Z_n(K)$ ist für jede natürliche Zahl n.

(b) Nur dann zentralisieren sich H und K bei jeder disjunkten subnormalen Einbettung, wenn $H \perp K$, $H \not\hookrightarrow K/Z_m(K)$ und $K \not\hookrightarrow H/Z_n(H)$ für jede natürliche Zahl m und jede natürliche Zahl n ist.

6. HINREICHENDE BEDINGUNGEN

Wir haben in Korollar 4.5. und Korollar 4.6. schon notwendige und hinreichende Bedingungen für Normalität bzw. für elementweise Vertauschbarkeit bei Paaren disjunkter subnormaler Untergruppen angegeben. Diese Ergebnisse beziehen sich jedoch auf ganz bestimmte Einbettungen. Wir wollen nun Sätze beweisen, die weitgehend unabhängig von einer speziellen Einbettung gelten. Das bedeutet, wir haben Voraussetzungen über die Strukturen der Subnormalteiler zu treffen.

LEMMA 6.1. Für die subnormalen Untergruppen H und K einer Gruppe G sei $HK = KH$, $H \cap K \leqslant Z_m(K)$ und $H \hookrightarrow K/Z_n(K)$ für natürliche Zahlen m und n. Dann ist $H^K \cap K \leqslant Z_s(K)$, wobei $s = \max(m,n)$ ist.

Beweis. Wir setzen $Z_s = Z_s(K)$ und $J = \langle H,K \rangle$. Nach Voraussetzung ist $H \cap K \leqslant Z_s$ und ferner wegen Lemma 2.6. $H \hookrightarrow K/Z_s$. Sei r der Defekt von H in J und $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_r = J$ die Normenkette. Für $r \leqslant 1$ ist $H^K = H$, daher die Behauptung richtig. Sei also $r > 1$. Zur Abkürzung setzen wir $K_\delta = H_\delta \cap K$ $(0 \leqslant \delta \leqslant r)$.

Wir zeigen durch Induktion nach δ, daß $K_\delta \leqslant Z_s$ ist für $\delta = 0,1,\ldots, r-1$. Daraus folgt dann die Behauptung $K_{r-1} \leqslant Z_s$ des Lemmas. Da $K_0 = H \cap K$ ist, ist der Induktionsanfang $\delta = 0$ nach Voraussetzung richtig. Sei also $\delta > 0$ und angenommen, daß $K_{\delta-1} \leqslant Z_s$ ist (δ ist nun fest, aber $0 < \delta < r$).

Auf Grund der Voraussetzung $HK = KH$ ist nach Dedekind

$$H_{\delta+1} = H_{\delta-1} K_{\delta+1}, \qquad (14)$$

und daher nach Konstruktion der Normenkette

$$H_\delta = H_{\delta-1}^{K_{\delta+1}} . \qquad (15)$$

Da $K_{\delta+1} \lhd\lhd H_{\delta+1}$, $s(H_{\delta+1}:H_{\delta-1}) = 2$ und nach Induktionsvoraussetzung $K_{\delta-1} = H_{\delta-1} \cap K_{\delta+1} \leqslant Z_s$ ist, erfüllen $H_{\delta-1}$ und $K_{\delta+1}$ in $H_{\delta+1}$ die Voraussetzungen des Lemmas 4.2.. Folglich ist mit (15) $K_\delta = H_\delta \cap K_{\delta+1}$ nilpotent. Weil $K_\delta \lhd\lhd K$ ist, ist $K_\delta Z_s/Z_s$ ein nilpotenter Subnormalteiler von K/Z_s.

Es ist $K_\delta Z_s/Z_s \cong K_\delta/K_\delta \cap Z_s$. Da nach Induktionsvoraussetzung $K_{\delta-1} \leqslant Z_s$ ist, ist daher $K_\delta Z_s/Z_s$ ein epimorphes Bild von $K_\delta/K_{\delta-1}$. Nun ist aber $H_\delta/H_{\delta-1} \cong K_\delta/K_{\delta-1}$, und $H_\delta/H_{\delta-1}$ wird von homomorphen Bildern von H erzeugt. Folglich wird $K_\delta Z_s/Z_s$ durch homomorphe Bilder von H erzeugt. Weil $H \subset\!\!\rightarrow K/Z_s$ und $K_\delta Zs/Z_s$ subnormal in K/Z_s ist, ist $H \subset\!\!\rightarrow K_\delta Z_s/Z_s$. Nach Korollar 2.5. ergibt sich nun $K_\delta \leqslant Z_s$. q.e.d.

THEOREM 6.2. Seien H und K subnormale Untergruppen einer Gruppe.

(a) Ist $H \perp K$, $H \cap K \leqslant Z_r(K)$ und $H \subset\!\!\rightarrow K/Z_m(K)$ für natürliche Zahlen r und m, dann ist $H \lhd \langle H,K\rangle$.

(b) Sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt, und gibt es überdies natürliche Zahlen n und s, so daß $H \cap K \leqslant Z_s(H)$ und $K \subset\!\!\rightarrow H/Z_n(H)$ ist, dann sind H und K elementweise vertauschbar.

Beweis. (a) Wegen $H \perp K$ gilt nach Lemma 1.2. $HK = KH$. Folglich ist nach Lemma 6.1. $H^K \cap K \leqslant Z_u(K)$, wobei u die größere der beiden Zahlen m und r ist. Da H und K subnormal in HK sind, gibt es natürliche Zahlen i und j, so daß $\gamma KH^i \leqslant H$, $\gamma HK^j \leqslant K$ ist. Da $\gamma HK^j \leqslant H^K$ ist, haben wir $\gamma HK^j \leqslant H^K \cap K \leqslant Z_u(K)$. Also ist $\gamma HK^{j+u} = 1$.

Wir wenden nun die starke Aussage des Lemmas 1.2. auf die orthogonalen Untergruppen H und K an. Danach gilt:

$$\gamma HK = \gamma KH^i \, \gamma HK^{j+u} \leqslant H.$$

(b) Da die Voraussetzungen über H und K jetzt symmetrisch sind, erhalten wir wie im Beweisteil (a) $\gamma KH^{i+v} = 1$, wobei $v = \max(n,s)$ gesetzt ist. Wiederum mit Lemma 1.2. ergibt sich $\gamma HK = 1$. q.e.d.

Für nilpotente Gruppen erhalten wir aus Theorem 5.1. und Theorem 6.2. das folgende

KOROLLAR 6.3.(a) Genau dann wird die Gruppe H von der nilpotenten Gruppe K bei jeder subnormalen Einbettung normalisiert, wenn H und K orthogonal sind.

(b) Genau dann zentralisieren sich zwei nilpotente Gruppen bei jeder subnormalen Einbettung, wenn sie orthogonal sind.

Bemerkung. 1. Nach Lemma 2.1.(g) sind zwei periodische und teilbare abelsche Gruppen orthogonal zueinander. Aus Korollar 6.3.(b) folgt daher der bekannte Satz [3, Lemma 3], daß das Erzeugnis periodischer und teilbarer abelscher Subnormalteiler abelsch ist. Ferner folgt aus diesem Korollar und Lemma 2.1.(g), daß eine nilpotente Gruppe mit periodischer und teilbarer Kommutatorfaktorgruppe abelsch ist.

2. Korollar 6.3.(b) ist eine Verallgemeinerung des bekannten Sachverhalts, daß in einer nilpotenten Gruppe zwei Elemente teilerfremder Ordnungen vertauschbar sind. Man beachte, daß in einer nilpotenten Gruppe jede Untergruppe subnormal ist, und daß nach Lemma 2.1.(d) zwei Gruppenelemente genau dann teilerfremde Ordnungen haben, wenn die von ihnen erzeugten zyklischen Untergruppen orthogonal sind.

In Theorem 6.2. wird die Orthogonalität der beiden Subnormalteiler stark ausgenützt. Wir geben nun hinreichende Bedingungen unter der im allgemeinen schwächeren Vertauschbarkeitsvoraussetzung an:

THEOREM 6.4. Seien H und K zwei vertauschbare Subnormalteiler einer Gruppe G und sei $H \cap K \leqslant Z_m(K)$ für eine natürliche Zahl m. Dann ist jede der beiden folgenden Bedingungen hinreichend für $H \lhd \langle H,K \rangle$:

(1) H ist suborthogonal zu jedem subnormalen Faktor $X/H \cap K$ von K.

(2) Es ist $\beta(K) \in \overline{\mathfrak{m}}$, und H ist orthogonal zu $\beta(K)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt für beide Teilbehauptungen indirekt. Sei $J = \langle H,K \rangle$. Wir nehmen an, es wäre $r = s(J:H) > 1$. Sei $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \ldots \lhd H_r = J$ die Normenkette. Nach unserer Annahme ist H kein Normalteiler von H_2. Daher ist nach Konstruktion der Normenkette $H_1 = H^{H_2}$, sowie $H_1 > H$. Zur Abkürzung sei $K_i = H_i \cap K$ gesetzt $(i = 0,1,2)$. Dann ist offenbar $K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \lhd \lhd K$.

Wegen der Voraussetzung $HK = KH$ ist nach Dedekind

$H_2 = HK_2$ und daher auch $H_1 = H^{K2}$. Da $H \cap K_2 = H \cap K$, also nach Voraussetzung $H \cap K_2 \leqslant Z_m(K)$ ist, können wir Lemma 4.2. auf H und K_2 in H_2 anwenden. Damit ist $K_1 = H^{K2} \cap K_2$ nilpotent. Da $K_1/K_o \cong H_1/H$ ist, wird K_1/K_o von homomorphen Bildern von H erzeugt. Nach unserer Annahme ist $K_1 > K_o$. Dies führen wir zu einem Widerspruch, indem wir jeweils eine der beiden Zusatzvoraussetzungen anwenden:

(1) K_1/K_o ist ein subnormaler Faktor von K, nach Voraussetzung ist also $H \hookrightarrow K_1/K_o$. Da K_1/K_o von homomorphen Bildern von H erzeugt wird und nilpotent ist, folgt aus Korollar 2.5. $K_1 = K_o$.

(2) Sei nun $ß(K) \in \mathfrak{m}$ und $H \perp ß(K)$. Da $K_1 \lhd\lhd K$ und nilpotent ist, ist $K_1 \leqslant ß(K)$. K_1 wird daher von gewissen abelschen subnormalen Untergruppen von K erzeugt. Nach Lemma 3.4. ist H orthogonal zu jedem abelschen Subnormalteiler von K, also ist nach Lemma 2.1.(f) $H \perp K_1$. Da K_1/K_o von homomorphen Bildern von H erzeugt wird, folgt aus Lemma 2.1.(e) und (f) $K_1/K_o \perp K_1/K_o$. K_1/K_o ist aber nilpotent und in $\mathfrak{m}$. Nach Lemma 3.4. sind daher je zwei abelsche Untergruppen von K_1/K_o orthogonal. Da nach Lemma 2.1.(a) und (d) keine zyklische Gruppe $\neq 1$ zu sich selbst orthogonal ist, ist notwendigerweise $K_1 = K_o$. q.e.d.

Einen Spezialfall von Theorem 6.4.(1) wollen wir herausgreifen, nämlich den Fall, daß die Subnormalteiler disjunkt sind. Der folgende Satz ergibt sich auch aus Lemma 6.1.:

KOROLLAR 6.5. Seien H und K disjunkte, vertauschbare subnormale Untergruppen einer Gruppe G. Sei ferner $H \hookrightarrow K$. Dann ist $H \lhd \langle H,K \rangle$.

Bemerkungen. 1. Nach Lemma 2.6. ist die Bedingung $H \hookrightarrow K$ im allgemeinen stärker als die Bedingung $H \hookrightarrow K/Z(K)$, daher auch nicht notwendig für Normalität: Wir wählen H als endliche p-Gruppe $\neq 1$ und $K \cong C_{p^\infty}$. Dann ist $H \perp K$, folglich zentralisieren sich H und K nach Korollar 6.3.(b) bei jeder subnormalen Einbettung. Es ist jedoch nicht $H \hookrightarrow K$.

2. Das Korollar 6.5. wird falsch, wenn man die Bedingung $H \hookrightarrow K$ durch die Bedingung $H \hookrightarrow K/Z(K)$ ersetzt: Sei D die Diedergruppe der Ordnung 8. D wird erzeugt durch zwei Elemente x, y mit den definierenden Relationen $x^4 = 1$, $y^2 = 1$, $yxy^{-1} = x^{-1}$. Setzt man $X = \langle x \rangle$, $Y = \langle y \rangle$, so ist $D = XY$, $X \cap Y = 1$, $X \lhd D$ und, da D nilpotent ist, $Y \lhd\lhd D$. Obwohl trivialerweise $Y \hookrightarrow X/Z(X)$ ist, ist Y nicht normal in D.

3. In diesem Beispiel ist $A(X) \cong Y$, also D isomorph zu dem Holomorph von X. - Wir haben uns in Theorem 5.3. auf Homomorphismen von der Gruppe H in die Gruppe der inneren Automorphismen der Gruppe K beschränkt, d.h. wir haben nur einen Teil von Lemma 5.2. wirklich ausgenützt. Lemma 5.2. legt die Frage nahe: Seien H und K zwei vertauschbare, disjunkte Subnormalteiler. Sei ferner jede nilpotente Untergruppe N von A(K) trivial, die epimorphes Bild von H ist und für die $N \lhd\lhd N \overset{i}{\times} K$ gilt. Ist unter diesen Voraussetzungen $H \lhd \langle H,K \rangle$? Für orthogonale Gruppen H und K impliziert $H \hookrightarrow K/Z(K)$ nach Theorem 6.2. und Lemma 5.2., daß jede solche Untergruppe von A(K) trivial ist.

Die Voraussetzung über den Durchschnitt der beiden Subnormalteiler kann im Vergleich zu unseren bisherigen Ergebnissen abgeschwächt werden:

THEOREM 6.6. Seien H und K vertauschbare subnormale Untergruppen mit auflösbarem Durchschnitt. Jeder auflösbare subnormale Faktor $X/H \cap K$ von K, der epimorphes Bild von H ist, sei trivial. Ist überdies
(1) $(H \cap K)^K$ auflösbar, oder
(2) $H \in \overline{\mathfrak{m}}$,
dann wird H von K normalisiert.

Beweis. Sei $J = \langle H,K \rangle$. Wir nehmen an, es wäre $r = s(J:H) > 1$. Sei $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \ldots \lhd H_r = J$ die Normenkette. Dann gibt es nach unserer Annahme ein $x \in H_2$, so daß $H^x \not\leq H$ ist. Wir setzen $K_0 = HH^x \cap K$. Da $HH^x \lhd H_1$ ist, ist K_0 subnormal in K und damit $K_0/H \cap K$ ein subnormaler Faktor von K. Da nach Voraussetzung $J = HK$ ist, ist $HK_0 = HH^x$. Folglich gilt auch:

$$HH^x/H \cong K_0/H \cap K. \qquad (16)$$

Andererseits ist $HH^X/H \cong H^X/H^X \cap H$. Folglich ist $K_0/H \cap K$ ein subnormaler Faktor von K, der epimorphes Bild von H ist. Nach unserer Annahme ist $K_0 > H \cap K$. Nach Voraussetzung ist jeder auflösbare subnormale Faktor $X/H \cap K$ von K trivial, der epimorphes Bild von H ist. Wir erhalten daher den gewünschten Widerspruch, indem wir zeigen, daß $K_0/H \cap K$ auflösbar ist. Um dies nachzuweisen, wenden wir unsere Zusatzvoraussetzungen an:

(1) Sei $(H \cap K)^K$ auflösbar. Zur Abkürzung sei $K_2 = H_2 \cap K$ gesetzt. Wegen $J = HK$ ist $H_2 = HK_2$. Da $K_2 \lhd\lhd H_2$ und $(H \cap K_2)^{K2} \leqslant (H \cap K)^K$ ist, erfüllen H und K_2 in H_2 die Voraussetzungen von Lemma 4.3.. Folglich ist $H_1/H = H^{K2}/H$ auflösbar. Es ist aber $HH^X \leqslant H_1$, daher folgt aus (16), daß $K_0/H \cap K$ auflösbar ist.

(2) Sei nun $H \varepsilon \overline{\mathfrak{m}}$. Nach Voraussetzung ist $H \cap K$ auflösbar. Eine auflösbare Gruppe ist natürlich nachauflösbar, nach Theorem 4.4. ist also $H^K \cap K^H$ nachauflösbar. Wegen $K_0 \leqslant H^K \cap K$ ist K_0 nachauflösbar. Insbesondere ist $K_0/H \cap K$ nachauflösbar. Als homomorphes Bild von H ist $K_0/H \cap K$ in $\overline{\mathfrak{m}}$, nach BAER [8, §4. Satz 3] daher sogar auflösbar. q.e.d.

Eine perfekte Gruppe ist orthogonal zu jeder anderen, daher gilt mit Lemma 1.2.:

KOROLLAR 6.7. Seien H und K subnormale Untergruppen mit auflösbarem Durchschnitt, H sei perfekt. Wenn überdies $(H \cap K)^K$ auflösbar oder $H \varepsilon \overline{\mathfrak{m}}$ ist, dann wird H von K normalisiert.

Bemerkungen. 1. Nach Lemma 3.7. und der daran anschließenden Bemerkung ist die Zusatzvoraussetzung "$(H \cap K)^K$ ist auflösbar" erfüllt, wenn zum Beispiel $K \varepsilon \overline{\mathfrak{m}} \cup \underline{\mathfrak{m}}$ ist. Theorem 6.6. und Korollar 6.7. gelten also, falls $H \varepsilon \overline{\mathfrak{m}}$ oder $K \varepsilon \overline{\mathfrak{m}}$ oder $K \varepsilon \underline{\mathfrak{m}}$ ist.

2. Die Voraussetzung über den Durchschnitt der beiden Subnormalteiler kann nicht wesentlich abgeschwächt werden. Der folgende Satz ist falsch: Sind H und K subnormale Untergruppen, H perfekt und $(H \cap K)^K$ nachauflösbar, dann ist $H \lhd \langle H,K \rangle$. Sei nämlich P eine der charakteristisch-einfachen, lokal-endlichen p-Gruppen von McLAIN [10] und $G = P \wr_r C_2$ das reguläre Kranz-

produkt von P mit C_2 [12, S. 97]. Dann besitzt G einen Normalteiler, der direktes Produkt zweier Kopien P_1 und P_2 von P ist. Wie man aus der Schlußbemerkung bei McLAIN [10] ersieht, liegt jede der McLAINschen Erzeugenden von P in einem abelschen Normalteiler von P, daher ist P nach Lemma 3.6. nachauflösbar. Wählen wir also $H = P_1$ und $K = G$, so ist $H \lhd\lhd G$, H perfekt, $(H \cap K)^K = P_1 \times P_2$ nachauflösbar, aber P_1 ist kein Normalteiler von $\langle H,K \rangle = G$.

7. LITERATUR

[1] WIELANDT, H. : Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. 45, 209-244 (1939).

[2] WIELANDT, H. : Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. 69, 463-465 (1958).

[3] ROSEBLADE, J.E.: On certain subnormal coalition classes. J. of Algebra 1, 132-138 (1964).

[4] ROSEBLADE, J.E.: The permutability of orthogonal subnormal subgroups. Math. Z. 90, 365-372 (1965).

[5] ROBINSON, D.S. : Joins of subnormal subgroups. Ill. J. of Math. 9, 144-168 (1965).

[6] FUCHS, L. : Abelian groups. Oxford Pergamon Press (1960).

[7] HALL, P. : Some sufficient conditions for a group to be nilpotent. Ill. J. of Math. 2, 787-801 (1958).

[8] BAER, R. : Nilgruppen. Math. Z. 62, 402-437 (1955).

[9] HIRSCH, K.A. : Über lokal-nilpotente Gruppen. Math. Z. 63, 290-294 (1955).

[10] McLAIN, D.H. : A characteristically-simple group. Proc. Cambr. Phil. Soc. 50, 641-642 (1954).

[11] ZASSENHAUS, H.: The theory of groups. Vandenhoek Rupprecht (1958).

[12] HUPPERT, B. : Endliche Gruppen I. Springer-Verlag (196[illegible]

[13] WIELANDT, H. : Topics in the theory of composite groups. Lecture notes. Madison, Wisconsin (1967).

L e b e n s l a u f

Ich bin am 31.3.1941 in Schwäbisch Gmünd geboren. Dort besuchte ich auch das Gymnasium. Im Frühjahr 1960 legte ich die Reifeprüfung ab und entschloß mich zum Studium der Mathematik und Physik. Meine akademischen Lehrer waren die Professoren Kneser, Pickert, Roquette, Schaefer und Wielandt (Mathematik), Krüger, Braunbek und Wildermuth (Physik). Anfang 1966 unterzog ich mich in Tübingen dem Staatsexamen und trat daraufhin in den Schuldienst ein. Auch als Studienreferendar und -assessor war es mir ein Anliegen, mich wissenschaftlich weiterzubilden. Unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. Helmut Wielandt arbeitete ich über subnormale Untergruppen. Ihm verdanke ich viele Anregungen und wohlwollende Unterstützung bei der Abfassung der vorliegenden Dissertation "Normalität bei Paaren subnormaler Untergruppen".
Seit dem 1.2.1970 bin ich als Akademischer Rat am Mathematischen Institut der Universität Tübingen tätig.

Peter Schmid

(Peter Schmid)

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681